

シンプレクティックトーリック多様体の同変な超曲面に関する Delzant 型定理

東京都立大学 大学院理学研究科 数理科学専攻
山口健太朗 (Kentaro YAMAGUCHI) *

概要

コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体のトーリック因子の補空間と複素トーラスの同一視のもとで、複素部分トーラスをシンプレクティックトーリック多様体の中でコンパクト化したものは一般にシンプレクティックトーリック多様体の複素部分多様体ではなく特異点をもつ場合がある。本講演では、複素部分トーラスが余次元 1 のときにそのコンパクト化が非特異な複素部分多様体になる必要十分条件を凸多面体の言葉で特徴づける。

1 導入

n 次元トーラスが効果的に Hamilton 作用している $2n$ 次元シンプレクティック多様体のことをシンプレクティックトーリック多様体とよぶ。コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体へのトーラスの Hamilton 作用による運動量写像の像（運動量多面体）は Delzant 多面体とよばれる凸多面体になる。一方で、Delzant 構成 [2] により与えられた Delzant 多面体を運動量多面体にもつコンパクトなシンプレクティックトーリック多様体を構成することができる。このようにして、コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体全体と Delzant 多面体全体との 1 対 1 対応を得られることが知られている。本稿ではこの 1 対 1 対応のことを Delzant 対応とよぶ。

[7] では、シンプレクティックトーリック多様体 M のトーリック因子 D の補空間 $M \setminus D$ と複素トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ との同一視に注目し、 k 次元アフィン部分空間 $V \subset \mathfrak{t}^n$ から定まる複素 k 次元トーラス $(\mathbb{C}^*)^k$ 作用の軌道 $C(V) \subset (\mathbb{C}^*)^n \cong M \setminus D$ をシンプレクティックトーリック多様体 M の中でコンパクト化したもの $\overline{C(V)}$ について調べた。

特に、 $\overline{C(V)}$ が M の複素部分多様体になるときアフィン部分空間 V から定まる k 次元トーラスの作用によって $\overline{C(V)}$ はシンプレクティックトーリック多様体になることがわかる。しかし一般に、 $\overline{C(V)}$ が M の複素部分多様体ではなく特異点をもつ場合がある。ここでは、Delzant 対応の類似の結果として、[6] に基づき $k = n - 1$ のとき $\overline{C(V)}$ が M の非特異な複素部分多様体となる必要十分条件を凸多面体の言葉で特徴づける。

* E-mail:yamaguchi-kentaro@ed.tmu.ac.jp

2 シンプレクティックトーリック多様体

滑らかな多様体 M 上の 2 次微分形式 ω が非退化な閉形式になっているとき、 ω をシンプレクティック形式とよび、組 (M, ω) をシンプレクティック多様体とよぶ。ここでは、シンプレクティック多様体 (M, ω) にトーラスが Hamilton 作用している状況を考える。

本節では、シンプレクティック多様体へのトーラスの Hamilton 作用およびシンプレクティックトーリック多様体について基本的な事項を述べる。

2.1 トーラスの Hamilton 作用

(M, ω) をシンプレクティック多様体とする。 (M, ω) へのトーラス T の右作用を

$$\begin{aligned} M \times T &\rightarrow M \\ (x, t) &\mapsto x \cdot t \end{aligned}$$

と表す。このとき、 T の元 t に対して、写像 $R_t : M \rightarrow M$ を

$$R_t(x) := x \cdot t$$

で定義する。

定義 2.1. シンプレクティック多様体 (M, ω) にトーラス T が右作用しているとする。任意の $t \in T$ に対して $R_t^* \omega = \omega$ が成り立つとき、 T 作用は ω を保つという。

トーラス T の Lie 環を $\mathfrak{t}$ と表す。

定義 2.2. シンプレクティック多様体 (M, ω) へのトーラス T の右作用が ω を保つとする。次の 2 条件を満たす写像 $\mu : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$ が存在するとき、 T 作用を Hamilton 作用とよぶ。

- 任意の $x \in M$, $t \in T$ に対して $\mu(x \cdot t) = \mu(x)$ が成り立つこと、
- 任意の $X \in \mathfrak{t}$ に対して $\iota(X^\sharp)\omega = -d\langle \mu, X \rangle$ が成り立つこと。ここで、 $X^\sharp$ は基本ベクトル場のこと。

また、このときの写像 $\mu : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$ を運動量写像とよぶ。

コンパクトなシンプレクティック多様体にトーラスが Hamilton 作用しているとき、その運動量写像の像に関して次の古典的な結果が成り立つ。

定理 2.3 (凸性定理 [1, 3]). コンパクトなシンプレクティック多様体 (M, ω) にトーラス T が Hamilton 作用しているとき、その運動量写像 $\mu : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$ の像は T 作用の固定点の像の凸包になる。

特に、 $\mu(M)$ は凸多面体になることがわかる。 $\mu(M)$ のことを運動量多面体とよぶ。

2.2 シンプレクティックトーリック多様体

シンプレクティック形式の非退化性からシンプレクティック多様体 (M, ω) の次元は偶数になることに注意する.

定義 2.4. $2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M, ω) に n 次元トーラス T^n が効果的に Hamilton 作用しているとき, (M, ω) をシンプレクティックトーリック多様体とよぶ.

コンパクトな $2n$ 次元シンプレクティックトーリック多様体への n 次元トーラスの Hamilton 作用についての運動量写像の像 (運動量多面体) は Delzant 多面体になっている. ここで, Delzant 多面体とは次で定義される凸多面体のことである.

定義 2.5. 次の 3 条件を満たす $(\mathfrak{t}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ の凸多面体 Δ を Delzant 多面体とよぶ.

- 単純であること. つまり, Δ の各頂点から n 本の辺が出ていること,
- 有理的であること. つまり, Δ の各頂点 λ から出る辺の方向ベクトル $v_1^\lambda, \dots, v_n^\lambda$ を $v_1^\lambda, \dots, v_n^\lambda \in \mathbb{Z}^n$ を満たすように選ぶことができること,
- 滑らかであること. つまり, 上の条件にある $v_1^\lambda, \dots, v_n^\lambda \in \mathbb{Z}^n$ を $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{Z}$ 基底になるように選ぶことができること.

また, Delzant 多面体 Δ の頂点の集合を Λ と表す.

たとえば, 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ に Fubini-Study 計量を入れた場合の n 次元トーラスの Hamilton 作用についての運動量多面体は n 単体である.

実は, Delzant 多面体の情報からシンプレクティック商を用いて, 与えられた Delzant 多面体が運動量多面体になるようなシンプレクティックトーリック多様体を構成することができる. この構成のことを Delzant 構成という.

以上のことから, 次のことがわかる.

定理 2.6 ([2]). コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体全体と Delzant 多面体全体は 1 対 1 対応する.

$$\{\text{コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体}\} / \sim \xrightarrow{1:1} \{\text{Delzant 多面体}\} / \sim$$

この対応関係のことを Delzant 対応とよぶ.

シンプレクティックトーリック多様体は Kähler 多様体になる [4]. Kähler 構造を用いることで, $2n$ 次元シンプレクティックトーリック多様体 M のトーリック因子 D の補空間 $M \setminus D$ は複素 n 次元トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ と同一視することができる. ここでは, Delzant 多面体の情報を用いて複素 n 次元トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ から $2n$ 次元シンプレクティックトーリック多様体 M を構成することをコンパクト化とよぶ.

また, Delzant 多面体 Δ の頂点ごとに出ている n 本の辺の方向ベクトルの情報から Δ に対応するシンプレクティックトーリック多様体 M に複素座標近傍系を構成することができる. $M = \mathbb{C}P^n$ の

とき、この複素座標近傍系は非斉次座標近傍系に一致するので、一般のシンプレクティックトーリック多様体のときもこの複素座標近傍系のことを非斉次座標近傍系とよぶ。

3 $\overline{C(V)}$ の構成

本節では、[7]における $\overline{C(V)}$ の構成を復習する。

$V \subset \mathfrak{t}^n$ を $n-1$ 次元アフィン部分空間、 $\overline{V}$ をその線形部分とする。 V の傾きが有理的であることを仮定すると、 $\overline{V} \cap \mathbb{Z}^n$ が階数 $n-1$ の $\mathbb{Z}$ 加群になることから $p_1, \dots, p_{n-1} \in \mathbb{Z}^n$ を $\overline{V} \cap \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^{n-1}$ の $\mathbb{Z}$ 基底になるように選ぶことができる。単射群準同型 $i_V : T^{n-1} \rightarrow T^n$ を

$$i_V(t_1, \dots, t_{n-1}) := \left(\prod_{l=1}^{n-1} t_l^{\langle p_l, e_1 \rangle}, \dots, \prod_{l=1}^{n-1} t_l^{\langle p_l, e_n \rangle} \right)$$

で定義する。ここで、 $e_1, \dots, e_n$ は $(\mathfrak{t}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ の標準基底、 $\langle, \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積とする。

有理的な傾きをもつ $n-1$ 次元アフィン部分空間 $V \subset \mathfrak{t}^n$ に対して、複素 n 次元トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の複素部分多様体 $C(V) \subset (\mathbb{C}^*)^n$ を

$$C(V) := \left\{ (e^{x_1 + \sqrt{-1}y_1}, \dots, e^{x_n + \sqrt{-1}y_n}) \in (\mathbb{C}^*)^n \mid \begin{array}{l} (x_1, \dots, x_n) \in V, \\ (e^{\sqrt{-1}y_1}, \dots, e^{\sqrt{-1}y_n}) \in i_V(T^{n-1}) \end{array} \right\}$$

と定義する。

複素部分多様体 $C(V) \subset (\mathbb{C}^*)^n$ をシンプレクティックトーリック多様体 M のトーリック因子 D の補空間 $M \setminus D$ に埋め込み M の中でコンパクト化したものを $\overline{C(V)} \subset M$ と定義する。このコンパクト化の操作を具体的に記述することで、 $\overline{C(V)} \subset M$ は M の非斉次座標近傍系ごとに多項式の零点集合として書くことができる。

定義 3.1. $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ をシンプレクティックトーリック多様体 M の非斉次座標近傍系とする。有理的な傾きをもつ $n-1$ 次元アフィン部分空間 $V \subset \mathfrak{t}^n$ に対して、 $\overline{C(V)} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda^{-1}(\overline{C_\lambda(V)}) \subset M$ を次で定義する。

$$\begin{aligned} \overline{C_\lambda(V)} &:= \{z^\lambda = (z_1^\lambda, \dots, z_n^\lambda) \in \varphi_\lambda(U_\lambda) \cong \mathbb{C}^n \mid f^\lambda(z^\lambda) = 0\} \\ f^\lambda(z^\lambda) &:= \prod_{\{i \mid \langle u_i^\lambda, q \rangle \geq 0\}} (z_i^\lambda)^{\langle u_i^\lambda, q \rangle} - e^{\langle a, q \rangle} \prod_{\{i \mid \langle u_i^\lambda, q \rangle \leq 0\}} (z_i^\lambda)^{-\langle u_i^\lambda, q \rangle} \end{aligned}$$

ここで、 $q \in \mathbb{Z}^n$ は $\overline{V}$ の直交補空間の原始的な基底、 $u_1^\lambda, \dots, u_n^\lambda \in \mathbb{Z}^n$ は $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{Z}$ 基底 $v_1^\lambda, \dots, v_n^\lambda$ の双対基底のこと。

注意 3.2. $\overline{C(V)}$ は $\overline{C(V)} \cap D$ 上の点で特異点をもつ場合がある。

[7] では、 $\overline{C(V)}$ が M の複素部分多様体になるとき、アフィン部分空間 V から定まる M と $\overline{C(V)}$ それぞれへの T^{n-1} の Hamilton 作用についての運動量写像 $(i_V^* \circ \mu) : M \rightarrow (\mathfrak{t}^{n-1})^*$, $\bar{\mu} : \overline{C(V)} \rightarrow (\mathfrak{t}^{n-1})^*$ に関して次のことを示した。

定理 3.3 ([7]). $\overline{C(V)}$ が M の複素部分多様体になるとき、

$$\bar{\mu}(\overline{C(V)}) = (i_V^* \circ \mu)(M) = i_V^*(\Delta)$$

が成り立つ.

特に, $\overline{C(V)}$ が M の複素部分多様体になるとき $\overline{C(V)}$ はシンプレクティックトーリック多様体になるので, 凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ は Delzant 多面体になる.

4 $\overline{C(V)}$ の Delzant 対応

$\overline{C(V)}$ は一般に特異点をもつ場合があるが, 定理 3.3 では $\overline{C(V)}$ が M の複素部分多様体になるとき $\overline{C(V)}$ の運動量多面体は $i_V^*(\Delta)$ に一致することがわかった. またこのとき, $\overline{C(V)}$ はシンプレクティックトーリック多様体であることから, $\overline{C(V)}$ に Delzant 対応する凸多面体について調べる.

ここで, $M = \mathbb{C}P^2$ のとき (Δ が直角二等辺三角形のとき) を考える. どの 1 次元アフィン部分空間 V に対しても凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ は $(\mathfrak{t}^1)^* \cong \mathbb{R}^1$ の線分, つまり $\mathbb{C}P^1$ に対応する Delzant 多面体になる. しかし, たとえば傾き 3 の 1 次元部分空間 V に対して $\overline{C(V)}$ は特異点をもつことが直接計算によりわかるので, $\overline{C(V)}$ が滑らかな複素部分多様体になる必要十分条件として凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ が Delzant 多面体になることだけでは不十分である.

実は, シンプレクティックトーリック軌道体の運動量多面体 (ラベル付き多面体) の情報から, シンプレクティックトーリック軌道体の特異点の情報を得られるという先行研究 [5] がある. この先行研究をヒントに, $\overline{C(V)}$ が (特異点のない) 滑らかな複素部分多様体になるかどうかを凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ の情報で特徴付けられないかを考える.

4.1 主結果

[6] における主結果を述べるための言葉の準備をする.

定義 4.1. 引き戻し $i_V^* : (\mathfrak{t}^n)^* \rightarrow (\mathfrak{t}^{n-1})^*$ に対して, 凸多面体 Δ の頂点 λ が次の 2 つの条件を満たすとき λ を good という.

- 点 $i_V^*(\lambda)$ が凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ の頂点になること,
- ベクトル $i_V^*(v_1^\lambda), \dots, i_V^*(v_n^\lambda) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ がすべて零ベクトルでないこと.

定義 4.2. 引き戻し $i_V^* : (\mathfrak{t}^n)^* \rightarrow (\mathfrak{t}^{n-1})^*$ に対して, Delzant 多面体 Δ の任意の good な頂点 λ が次の 2 つの条件を満たすとき Δ を good という.

- 凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ の頂点 $i_V^*(\lambda)$ から $n-1$ 本の辺が出ていること,
- ある $j \in \{1, \dots, n\}$ が存在して凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ の方向ベクトル $i_V^*(v_1^\lambda), \dots, i_V^*(v_{j-1}^\lambda), i_V^*(v_{j+1}^\lambda), \dots, i_V^*(v_n^\lambda)$ が $\mathbb{Z}^{n-1}$ の $\mathbb{Z}$ -基底になること.

定理 4.3 (主結果). $V \subset \mathfrak{t}^n$ を $n-1$ 次元アフィン部分空間とする. $\overline{C(V)}$ がシンプレクティックトーリック多様体 M の複素超曲面になることと, 凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ が good であることは同値.

参考文献

- [1] M. F. Atiyah. Convexity and commuting Hamiltonians. *Bull. London Math. Soc.*, 14(1):1–15, 1982.
- [2] Thomas Delzant. Hamiltoniens périodiques et images convexes de l’application moment. *Bull. Soc. Math. France*, 116(3):315–339, 1988.
- [3] V. Guillemin and S. Sternberg. Convexity properties of the moment mapping. *Invent. Math.*, 67(3):491–513, 1982.
- [4] Victor Guillemin. Kaehler structures on toric varieties. *J. Differential Geom.*, 40(2):285–309, 1994.
- [5] Eugene Lerman and Susan Tolman. Hamiltonian torus actions on symplectic orbifolds and toric varieties. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(10):4201–4230, 1997.
- [6] Kentaro Yamaguchi. Delzant type theorem for torus-equivariantly embedded toric hypersurfaces. arXiv:2411.06715.
- [7] Kentaro Yamaguchi. Torus-equivariantly embedded toric manifolds associated to affine subspaces. preprint arXiv:2306.15312, to appear in Osaka Journal of Mathematics.